На правах рукописи

Кудрявцева Ольга Сергеевна

ПОЛУГРУППЫ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЗАДАННЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»

Научный руководитель: **Горяйнов Виктор Владимирович**
доктор физико-математических наук,
профессор,
ВГИ (филиал) ФГАОУ ВПО ВолГУ

Официальные оппоненты: **Авхадиев Фарит Габидинович**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГАОУ ВПО КФУ

Старков Виктор Васильевич
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО ПетрГУ

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита состоится «19» сентября 2013 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан « » августа 2013 года и размещён на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Липачёв Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Одним из центральных вопросов дифференциальной динамики является возможность вложения итераций в непрерывную группу (или полугруппу) отображений. В теории аналитических функций задача вложения впервые появилась как задача дробного итерирования. Её изучение возможно в трёх ситуациях, что обусловлено необходимостью согласованности областей определения и значений итераций отображения. Первые исследования задачи дробного итерирования относятся к работам Шрёдера (1871 г.) и Кёнигса (1884 г.) и соответствуют локальному случаю, когда областью определения является окрестность общей неподвижной точки (для каждой итерации – своя окрестность). Позже получило развитие направление, связанное с изучением мероморфных функций, когда областью определения является вся комплексная плоскость, исключая множество изолированных особых точек – полюсов. Принципиальные результаты здесь получены в работах Бейкера (1964 г.), Карлина и МакГрегора (1968 г.). И, наконец, случай, когда функция аналитична в некоторой области и принимает значения из этой же области. Существенное влияние на развитие этого направления оказали результаты Берксона и Порта (1978 г.), Коувена (1981 г.), В. В. Горяйнова (1991 г.). Последнее направление, в отличие от первых двух, более разнообразно с точки зрения получаемых результатов, и, кроме того, его активное развитие стимулируется широким кругом приложений, например, в теории случайных ветвящихся процессов, в некоммутативной теории вероятностей, в теории композиционных операторов. Значимость этого направления и возросший к нему в последнее время интерес связаны также с новыми приложениями уравнения Лёвнера, такими как SLE (Shramm (stochastic) – Loewner evolution), которые привели к решению ряда трудных задач в различных областях естествознания.

Ещё в работах Шрёдера (1871 г.), Кёнигса (1884 г.), Адамара (1944 г.) была обнаружена связь задачи дробного итерирования с решением функциональных уравнений, называемых уравнениями Абеля и Шрёдера. Эта тема подробно освещена в монографиях Кучмы (1968 г.), Кучмы, Чижевского и Гера (1990 г.). Впоследствии данное направление получило развитие как в теории аналитических функций, так и в вещественном анализе.

Существенное продвижение в исследовании задачи дробного итерирования было получено, когда семейство дробных итераций стали рассматривать как однопараметрическую полугруппу. Как и в общей дифференциальной динамике, однопараметрическая полугруппа голоморфных отображений вполне характеризуется инфинитезимальной образующей. Вид инфинитезимальной образующей для выделенной полугруппы голоморфных отображений играет важную роль в изучении её структуры. В частности, общий вид инфинитезимальной образующей для полугруппы конформных отображений единичного круга в себя, оставляющих неподвижным начало координат, приводит к виду правой части уравнения Лёвнера – Куфарева.

Степень разработанности темы исследования. Инфинитезимальное описание однопараметрических полугрупп тесно связано с анализом неподвижных точек отображения. Исследованию вида инфинитезимальной образующей с учётом этих инвариантов посвящено большое количество работ. Впервые вид инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя был получен Лёвнером (1923 г.) в случае, когда неподвижной точкой элементов однопараметрической полугруппы является начало координат. Ключевым результатом, выявляющим структуру общей полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя и открывающим возможности для дальнейших исследований, стала формула Берксона – Порты (1978 г.). Эта формула даёт вид инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя в терминах некоторой выделенной неподвижной точки, которая является локально равномерным пределом последовательности итераций. Вопрос о получении аналогов формулы Берксона – Порты при наличии дополнительных неподвижных точек в различных постановках изучался в работах В. В. Горяйнова, Ф. Браччи, С. Диаз-Мадригала, М. Контрераса, Х. Поммеренке, Д. Шойхета и других авторов. Возникающие здесь трудности связаны с граничным поведением аналитических функций. В большинстве работ этого направления исследовались свойства, которыми должна обладать инфинитезимальная образующая при наличии дополнительных неподвижных точек.

Решения функциональных уравнений Абеля и Шрёдера часто называют функцией Кёнигса. Задаче выделения класса функций Кёнигса, отвечающих вложимым в однопараметрическую полугруппу отображениям, посвящены работы многих авторов. Существенное продвижение в исследовании этой задачи получено в совместной работе М. Элина, В. В. Горяйнова, С. Рейха, Д. Шойхета (2002 г.). В ней в терминах свойств функции Кёнигса установлены критерии вложимости отображения в однопараметрическую полугруппу. Связь между наличием дополнительной неподвижной точки у однопараметрической полугруппы и свойствами функции Кёнигса изучалась в работе коллектива авторов М. Контрерас, С. Диаз-Мадригал, Х. Поммеренке (2004 г.). При этом, вопрос получения явного вида функции Кёнигса, соответствующей вложимым отображениям, оставался нерешённым.

Целью исследования является получение инфинитезимального описания однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя с заданными граничными свойствами; выделение условий существования дробных итераций; описание решений функциональных уравнений, связанных с функциями, допускающими дробное итерирование.

Объектами исследования являются однопараметрические полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя с заданными неподвижными точками и их инфинитезимальные образующие. А также класс функций Кёнигса, отвечающих голоморфным отображениям единичного круга в себя, допускающим вложение в однопараметрическую полугруппу дробных итераций.

Научная новизна. В диссертационной работе получено обобщение формулы Берксона – Порты для инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя при наличии дополнительной неподвижной точки. Получено интегральное представление класса функций Кёнигса для вложимых голоморфных отображений единичного круга в себя с неподвижной точкой внутри или на границе единичного круга. А также выделено описание тех функций Кёнигса, которые соответствуют вложимым голоморфным отображениям с двумя неподвижными точками.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование носит теоретический характер. Полученные результаты выявляют структуру полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя с заданными неподвижными точками и свойствами и позволяют решать широкий круг задач, возникающих в тех областях естествознания, где при описании процессов используется динамика голоморфного отображения. Результаты диссертационной работы могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся исследованием полугрупп голоморфных отображений относительно операции композиции, а также найти применение в специальных курсах по комплексному анализу.

Методы исследования. В основе диссертационного исследования лежат методы комплексного анализа, динамики голоморфного отображения, геометрической теории функций комплексного переменного.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получен аналог формулы Берксона – Порты для инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками.

2. Получено параметрическое представление класса функций Кёнигса, отве-

чающих голоморфным отображениям единичного круга в себя, допускающим вложение в однопараметрическую полугруппу дробных итераций.

3. Выделено описание функций Кёнигса для вложимых голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками.

4. Установлен критерий существования дробных итераций в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами.

5. Дано описание однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя с инвариантным диаметром, на котором отображения имеют ограниченное искажение.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных и российских конференциях: 7-й молодёжной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2008" (Казань, 2008 г.), International Conference "Analytic methods of mechanics and complex analysis" dedicated to N. A. Kilchevskii and V. A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary (Киев, 2009 г.), 15-й Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения", посвящённой 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 2010 г.), 9-й молодёжной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2010" (Казань, 2010 г.), 10-й международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 2011 г.), 16-й Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2012 г.), 20-й международной конференции "Математика. Экономика. Образование." (Ростов-на-Дону, 2012 г.), 6-й Петрозаводской международной конференции "Комплексный анализ и приложения" (Петрозаводск, 2012 г.), Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2013 г.), а также на научных конференциях молодых исследователей Волгоградской области (Волгоград, 2008 г., 2010 г.) и конференциях профессорско-преподавательского состава Волгоградского государственного университета (2008–2013 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в работах [1]–[13]. Публикации [1], [3], [13] выполнены в соавторстве с научным руководителем, где В. В. Горяйнову принадлежит постановка задач и основные методы их решения. Статьи [1] и [2] опубликованы в изданиях, входящих в утверждённый ВАК перечень ведущих рецензируемых изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 95 страниц и состоит из введения, трёх глав, заключения, списка условных обозначений и библиографического списка. В работе используется подчинённая нумерация. При этом нумерация параграфов, определений, лемм, теорем и формул подчинена нумерации глав, нумерация следствий – нумерации соответствующих теорем. Библиография диссертации содержит 67 наименований, включая работы автора.

Некоторые результаты второй главы и все результаты третьей главы были получены в ходе работы по гранту РФФИ № 12-01-00434-а.

Краткое содержание работы

Все утверждения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию.

Во введении даётся обзор результатов исследований и литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, а также кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1. Однопараметрические полугруппы голоморфных отображений и функция Кёнигса

В первой главе решается задача инфинитезимального описания, а также описания посредством функциональных уравнений Абеля и Шрёдера однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя с заданными неподвижными точками.

В §1.1 установлен центральный результат диссертационной работы, а именно: получен аналог формулы Берксона – Порты для инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками.

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{P}$.

Под *однопараметрической полугруппой* в $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ с обычной топологией вещественных чисел в полугруппу $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{L})$. Элементы f^t, $t \geqslant 0$, однопараметрической полугруппы называются *дробными итерациями* функции $f = f^1$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathfrak{P}(\mathfrak{L})$ *вложима в однопараметрическую полугруппу* в $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}(\mathfrak{L})$, что $f^1 = f$.

Всякая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ характеризуется своей *инфинитезимальной образующей*

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f^t(z) - z}{t} = v(z)$$

посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z))$$

с начальным условием $f^t(z)|_{t=0} = z$.

В описании инфинитезимальных образующих важную роль играет природа неподвижных точек отображения. Если $f \in \mathfrak{P}$ и $f(z) \not\equiv z$, то в силу принципа гиперболической метрики функция f может иметь внутри единичного круга $\mathbb{D}$ не более одной неподвижной точки. С другой стороны, может оказаться, что $f \in \mathfrak{P}$ не имеет внутри единичного круга $\mathbb{D}$ неподвижной точки. Однако её заменяет некоторая выделенная точка q на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Более точно, классический результат Данжуа и Вольфа (1926 г.) утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя, то существует единственная точка q, $|q| \leqslant 1$, такая, что последовательность натуральных итераций $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, функции f сходится локально равномерно в $\mathbb{D}$ к q.

Если q является внутренней точкой, т. е. $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$ и $|f'(q)| \leqslant 1$. В случае, когда q – граничная точка, т. е. $q \in \mathbb{T}$, существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z\to q} f(z)\,, \quad f'(q) = \lim_{z\to q} f'(z) = \lim_{z\to q} \frac{f(z) - q}{z - q}$$

и $f(q) = q$, $0 < f'(q) \leqslant 1$, т. е. она также является неподвижной (в смысле углового предела) притягивающей точкой. Точка q называется *точкой Данжуа – Вольфа* функции f и она является общей для всех итераций этой функции (включая и дробные, если они существуют). В действительности это относится и ко всем неподвижным точкам.

Формула Берксона – Порты даёт полное описание инфинитезимальных образующих полугруппы $\mathfrak{P}$ в терминах точки Данжуа – Вольфа

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Если функция $f \in \mathfrak{P}$, кроме точки Данжуа – Вольфа q, $|q| \leqslant 1$, имеет дополнительную неподвижную точку a, то она должна располагаться на единичной окружности $\mathbb{T}$, а условие того, что она является неподвижной точкой понимается в смысле углового предела

$$\lim_{z \to a} f(z) = a.$$

Кроме того, в силу теоремы Жюлиа – Каратеодори угловая производная $f'(a) \geqslant 1$ и равенство достигается для $f(z) \equiv z$.

Теорема 1.1. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция v являлась инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа – Вольфа q, $q \in \overline{\mathbb{D}}$, и неподвижной точкой a, $a \in \mathbb{T}$, в которой функции f^t, $t > 0$, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$v(z) = \alpha\,(q - z)(1 - \overline{q}z)(1 - \overline{a}z)h(\overline{a}z)\,,$$

где $\alpha > 0$, и

$$h(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z}\, d\mu(\varkappa)$$

с некоторой вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$.

В §1.2 получено параметрическое представление классов функций Кёнигса, которые соответствуют вложимым голоморфным отображениям единичного круга $\mathbb{D}$ в себя с заданной внутренней или граничной точкой Данжуа – Вольфа.

Пусть функция $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя и имеет внутреннюю точку Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{D}$. Если $f'(q) \neq 0$, то существует предел

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^n(z) - q}{(f'(q))^n}\,, \tag{1}$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию, удовлетворяющую условиям $F(q) = 0$, $F'(q) = 1$. Эта функция является решением функционального уравнения Шрёдера

$$F(f(z)) = f'(q)F(z)$$

и называется *функцией Кёнигса.*

Теорема 1.2. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{D}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$F(z) = (z-q)\left(\frac{1-\overline{q}z}{1-|q|^2}\right)^{\sigma^2} \exp\left\{\left(1+\sigma^2\right)\int\limits_{\mathbb{T}} \ln\frac{1-\varkappa q}{1-\varkappa z}\, d\mu(\varkappa)\right\} \tag{2}$$

с некоторым $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. При этом, под степенной функцией и логарифмом понимаются ветви, которые принимают значения 1 и 0, соответственно, при $z = q$.

Отметим, что функция F, определяемая по формуле (2), является однолистной в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на θ-спиральную область. При этом, семейство функций $f^t(z) = F^{-1}\left(e^{-\sigma t} F(z)\right)$, $t \geqslant 0$, определяет однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{D}$.

В случае граничной точки Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{T}$ определение функции Кёнигса, аналогичное (1), затрудняется тем, что если $f'(q) = 1$, то соответствующая предельная функция может оказаться тождественно постоянной. Однако, с каждой однопараметрической полугруппой $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{T}$ можно однозначно ассоциировать функцию F, определяемую посредством равенств $F(0) = 0, F'(z) = 1/v(z)$, где v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$. Функция F удовлетворяет функциональному уравнению Абеля

$$F\left(f^t(z)\right) = F(z) + t,$$

$t \geqslant 0$, и называется *функцией Кёнигса* однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в случае граничной точки Данжуа – Вольфа.

Теорема 1.3. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа – Вольфа $q \in \mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$\begin{aligned} F(z) = i\beta\,\frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z} + \lambda_1\,\frac{\overline{q}z}{\left(1-\overline{q}z\right)^2} \;+ \\ + \lambda_2 \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\{\overline{q}\}} \left(\ln\frac{1-\varkappa z}{1-\overline{q}z} + i\left(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}\right)\frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z}\right)\frac{d\mu(\varkappa)}{1-\operatorname{Re}\{\varkappa q\}} \end{aligned}$$

с некоторыми $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}\setminus\{\overline{q}\}$. При этом, под логарифмом понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

В §1.3 выделено описание функций Кёнигса, которые соответствуют вложимым голоморфным отображениям единичного круга $\mathbb{D}$ в себя с двумя неподвижными точками.

Теорема 1.4. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{D}$ и неподвижной точкой $a \in \mathbb{T}$, в которой функции f^t, $t > 0$, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$F(z) = (z-q)\left(\frac{1-\overline{q}z}{1-|q|^2}\right)^{\sigma^2}\left(\frac{1-\overline{a}q}{1-\overline{a}z}\right)^{\lambda_1\left(1+\sigma^2\right)} \times$$
$$\times\ \exp\left\{\lambda_2\left(1+\sigma^2\right)\int\limits_{\mathbb{T}} \ln\frac{1-\varkappa q}{1-\varkappa z}\,d\mu(\varkappa)\right\}$$

с некоторыми $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. При этом, под степенными функциями и логарифмом понимаются ветви, которые принимают значения 1 и 0, соответственно, при $z = q$.

Теорема 1.5. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F являлась функцией Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}$ и неподвижной точкой $a \in \mathbb{T}$, в которой функции f^t, $t > 0$, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$F(z) = i\beta\,\frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z} + \lambda_1\,\ln\frac{1-\overline{a}z}{1-\overline{q}z} + \lambda_2\,\frac{\overline{q}z}{\left(1-\overline{q}z\right)^2} \, +$$
$$+\,\lambda_3 \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\{\overline{q}\}} \left(\ln\frac{1-\varkappa z}{1-\overline{q}z} + i\left(\operatorname{Im}\{\varkappa q\}\right)\frac{\overline{q}z}{1-\overline{q}z}\right)\frac{d\mu(\varkappa)}{1-\operatorname{Re}\{\varkappa q\}}$$

с некоторыми $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T} \setminus \{\overline{q}\}$. При этом, под логарифмами понимаются ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1], [3] – [6], [13].

Глава 2. Голоморфные отображения круга в себя с вещественными коэффициентами

Во второй главе относительно задачи дробного итерирования исследуется класс голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами.

В §2.1 даётся описание однопараметрических полугрупп в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Предполагается существование внутренней неподвижной точки. Решение приводится в терминах функции Кёнигса.

Пусть $\mathfrak{P}_r[0]$ – совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$ и производные $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in \mathfrak{P}_r[0]$. Тогда, если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$, то её функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = z \exp\left\{ \int\limits_{[-1,1]} \ln \frac{1}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x) \right\} \tag{3}$$

с некоторой вероятностной мерой μ на $[-1, 1]$. При этом, под логарифмом понимается ветвь, принимающая значение 0 при $z = 0$.

Обратно, всякая функция F вида (3) однолистна в $\mathbb{D}$, отображает $\mathbb{D}$ на звёздную относительно начала координат область и является функцией Кёнигса для функций $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$. При этом, функции f принадлежат $\mathfrak{P}_r[0]$ и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$.

Также в этом параграфе приводится результат, являющийся детализацией теоремы 2.1 в случае, когда функция $f \in \mathfrak{P}_r[0]$ имеет дополнительную неподвижную точку.

В §2.2 найдены необходимые условия существования дробных итераций голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Эти условия сформулированы в терминах оценок их начальных коэффициентов, что делает их наглядными и легко проверяемыми.

Теорема 2.3. *Пусть $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \in \mathfrak{P}_r[0]$ и вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$. Тогда*

$$\begin{aligned} 0 <& c_1 \leqslant 1, \\ -2c_1(1 - c_1) \leqslant& c_2 \leqslant 2c_1(1 - c_1), \\ \frac{1}{c_1} c_2^2 - c_1\left(1 - c_1^2\right) \leqslant& c_3 \leqslant \frac{1 - 3c_1}{2c_1(1 - c_1)} c_2^2 + c_1\left(1 - c_1^2\right). \end{aligned}$$

Полученные в теореме 2.3 оценки коэффициентов лучше соответствующих точных оценок в классе ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами. Сравнение с оценками в данном классе связано с тем, что необходимым условием существования дробных итераций функции является её однолистность.

В §2.3 даётся описание экстремальных функций в задаче об оценке третьего коэффициента функций, допускающих дробное итерирование в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Приводятся соответствующие иллюстрации.

Теорема 2.5. *Пусть* $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots \in \mathfrak{P}_r[0]$ *отлична от тождественного преобразования и вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{P}_r[0]$. *Справедливы следующие утверждения:*

1)
$$c_3 = \frac{1-3c_1}{2c_1\left(1-c_1\right)}\, c_2^2 + c_1\left(1-c_1^2\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z) = F^{-1}\left(c_1\, F(z)\right),$$

где F *– функция Кёнигса, определяемая по формуле*

$$F(z) = \frac{z}{(1+z)^{1-\lambda}\,(1-z)^{1+\lambda}}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,.$$

2)
$$c_3 = \frac{1}{c_1}\, c_2^2 - c_1\left(1-c_1^2\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z) = F^{-1}\left(c_1\, F(z)\right),$$

где F *– функция Кёнигса, определяемая по формуле*

$$F(z) = \frac{z}{1-2\lambda z+z^2}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,.$$

Результаты второй главы опубликованы в работах [2], [7] – [9].

Глава 3. Голоморфные отображения круга в себя с инвариантным диаметром и ограниченным искажением

В третьей главе задача дробного итерирования исследуется в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с инвариантным диаметром и ограниченным искажением. Решение даётся в терминах функции Кёнигса.

В §3.1 получено полное решение задачи вложимости в классе $\mathfrak{D}$, который представляет собой совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

(1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \pm 1$;

(2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

Решение задачи естественным образом расслаивается на три случая в зависимости от наличия или отсутствия внутренней неподвижной точки функции $f \in \mathfrak{D}$. Если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре. Если же $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) \neq x$ для всех $x \in (-1,1)$, то выражение $f(x) - x$ сохраняет знак.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$. Тогда, если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то её функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = (z-q)\,\frac{1-qz}{1-q^2}\left(\frac{1+q}{1+z}\right)^{2\gamma_1}\left(\frac{1-q}{1-z}\right)^{2\gamma_2} \times \\ \times\ \exp\left\{\gamma_3\int\limits_{[-1,1]}\ln\frac{1-2xq+q^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\right\} \tag{4}$$

с некоторыми $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 \geqslant 0$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. При этом, под степенными функциями и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения 1 и 0, соответственно, при $z = q$.

Обратно, всякая функция F вида (4) однолистна в $\mathbb{D}$, отображает $\mathbb{D}$ на звёздную относительно начала координат область и является функцией Кёнигса для функций $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$. При этом, функции f принадлежат $\mathfrak{D}$, $f(q) = q$ и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) > x$ для всех $x \in (-1,1)$. Тогда, если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то её функция Кёнигса F*

имеет вид

$$F(z) = \lambda_1 \ln \frac{1+z}{1-z} + \lambda_2 \frac{z}{(1-z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{[-1,1)} \ln \frac{1-2xz+z^2}{(1-z)^2} \frac{d\mu(x)}{1-x} \tag{5}$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ *и вероятностной мерой* μ *на* $[-1,1)$. *При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение* 0 *при* $z = 0$.

Обратно, всякая функция F *вида (5) однолистна в* $\mathbb{D}$, *отображает* $\mathbb{D}$ *на область, которая с каждой точкой* $w \in F(\mathbb{D})$ *содержит и весь луч* $\{w+t\colon t \geqslant 0\}$, *и является функцией Кёнигса для функций* $f(z) = F^{-1}(F(z)+1)$. *При этом, функции* f *принадлежат* $\mathfrak{D}$, $f(x) > x$ *для всех* $x \in (-1,1)$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in \mathfrak{D}$ *и* $f(x) < x$ *для всех* $x \in (-1,1)$. *Тогда, если* f *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, *то её функция Кёнигса* F *имеет вид*

$$F(z) = \lambda_1 \ln \frac{1-z}{1+z} - \lambda_2 \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{(-1,1]} \ln \frac{1-2xz+z^2}{(1+z)^2} \frac{d\mu(x)}{1+x} \tag{6}$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ *и вероятностной мерой* μ *на* $(-1,1]$. *При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение* 0 *при* $z = 0$.

Обратно, всякая функция F *вида (6) однолистна в* $\mathbb{D}$, *отображает* $\mathbb{D}$ *на область, которая с каждой точкой* $w \in F(\mathbb{D})$ *содержит и весь луч* $\{w+t\colon t \geqslant 0\}$, *и является функцией Кёнигса для функций* $f(z) = F^{-1}(F(z)+1)$. *При этом, функции* f *принадлежат* $\mathfrak{D}$, $f(x) < x$ *для всех* $x \in (-1,1)$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [10] – [12].

Заключение

В диссертационной работе установлен безусловный критерий для инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя в случае, когда точка Данжуа – Вольфа может быть как внутренней, так и граничной, и имеется дополнительная неподвижная точка, в которой элементы однопараметрической полугруппы обладают конечными угловыми производными.

Получено интегральное представление классов функций Кёнигса, которые соответствуют вложимым отображениям единичного круга в себя с заданной внутренней или граничной точкой Данжуа – Вольфа. А также выделены те функции Кёнигса, которые отвечают вложимым отображениям с двумя неподвижными точками.

Найдены условия существования дробных итераций в классе голоморфных отображений единичного круга в себя с вещественными тейлоровскими коэффициентами.

Дано описание однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя с инвариантным диаметром, на котором отображения имеют ограниченное искажение.

Вид инфинитезимальных образующих полугрупп конформных отображений с выделенными граничными свойствами открывает возможности дальнейшего развития параметрического метода теории однолистных функций. Полученные результаты могут найти приложения как в геометрической теории функций, так и в тех областях естествознания, где описание процессов происходит посредством комплексной динамики.

Автор искренне благодарна своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Виктору Владимировичу Горяйнову за постановку интересных задач и постоянную поддержку в их исследовании, за профессионализм, педагогическое мастерство и внимательное отношение на протяжении всего обучения в институте и аспирантуре. А также д.ф.-м.н., профессору В. В. Старкову за полезные замечания по работе. Отдельно хотела бы сказать слова благодарности к.ф. - м.н. А. Ю. Трынину, к.ф.-м.н. Н. М. Полубояровой, к.ф.-м.н. А. В. Светлову за моральную и информационную поддержку. Спасибо моим друзьям по конференциям и коллективу кафедры прикладной математики и информатики Волжского гуманитарного института за участие и вдохновение на научный труд, родителям – за понимание и помощь.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

[1] *Горяйнов, В. В.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса / В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева // Матем. сб. – 2011. – № 7. – С. 43–74. (диссертанта – 1,3 п.л.)

[2] *Кудрявцева, О. С.* Функция Кёнигса и дробное итерирование аналитических в единичном круге функций с вещественными коэффициентами и неподвижными точками / О. С. Кудрявцева // Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 67–71. (0,52 п.л.)

Публикации в других изданиях

[3] *Горяйнов, В. В.* Аналог формулы Берксона-Порты в случае двух неподвижных точек / В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 15-й Саратовской зимней школы, посвящённой 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. – Саратов : Издательство Саратовского университета, 2010. – С. 58–59. (диссертанта – 0,025 п.л.)

[4] *Кудрявцева, О. С.* Однопараметрические полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками / О. С. Кудрявцева // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского : Материалы Седьмой молодёжной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2008". – Казань : Издательство Казанского государственного университета, 2008. – Т. 37. – С. 108–110. (0,12 п.л.)

[5] *Кудрявцева, О. С.* Интегральное представление класса функций, связанных с дробным итерированием голоморфных отображений единичного круга в себя, сохраняющих начало координат / О. С. Кудрявцева // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского : Материалы Девятой молодёжной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2010". – Казань : Издательство Казанского математического общества, 2010. – Т. 40. – С. 197–200. (0,11 п.л.)

[6] *Кудрявцева, О. С.* К вопросу о дробном итерировании голоморфных отображений единичного круга в себя, сохраняющих начало координат / О. С. Кудрявцева // XV региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области. Вып. 4. Физика и математика : Тезисы докладов. – Волгоград : Издательство Волгоградского государственного университета, 2011. – С. 74–76. (0,12 п.л.)

[7] *Кудрявцева, О. С.* Функция Кёнигса и необходимые условия дробного итерирования аналитических функций с вещественными коэффициентами /

О. С. Кудрявцева // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского : Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”. – Казань : Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2011. – Т. 43. – С. 217–219. (0,12 п.л.)

[8] *Кудрявцева, О. С.* Дробное итерирование аналитических в единичном круге функций с вещественными коэффициентами / О. С. Кудрявцева // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1. Математика. Физика. – 2011. – № 2 (15). – С. 50–62. (1,5 п.л.)

[9] *Кудрявцева, О. С.* Дробное итерирование аналитических функций с вещественными коэффициентами и неподвижными точками / О. С. Кудрявцева // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 16-й Саратовской зимней школы. – Саратов : ООО “Издательство “Научная книга”, 2012. – С. 103–104. (0,06 п.л.)

[10] *Кудрявцева, О. С.* Дробное итерирование аналитических в единичном круге функций, оставляющих инвариантным вещественный диаметр / О. С. Кудрявцева // XX Международная конференция “Математика. Экономика. Образование”. VII международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”. VI Междисциплинарный семинар “Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий” : Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону : Издательство СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012. – С. 109 – 110. (0,06 п.л.)

[11] *Кудрявцева, О. С.* Однопараметрические полугруппы голоморфных отображений единичного круга в себя, обладающих свойством симметрии / О. С. Кудрявцева // Комплексный анализ и приложения : Материалы VI Петрозаводской международной конференции. – Петрозаводск : Издательство Петрозаводского государственного университета, 2012. – С. 44–47. (0,2 п.л.)

[12] *Кудрявцева, О. С.* Критерии вложимости в классе голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром / О. С. Кудрявцева // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. – С. 129–131. (0,09 п.л.)

[13] *Goryainov, V.* Semigroups of holomorphic mappings of the unit disk, with two fixed points / V. Goryainov, O. Kudryavtseva // International Conference "Analytic methods of mechanics and complex analysis" dedicated to N. A. Kilchevskii and V. A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary : Abstracts. – Kiev : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2009. – P. 22–23. (диссертанта – 0,025 п.л.)